

# Modellbildung in der Verkehrsdynamik



**Technische Universität Bergakademie Freiberg**

## Literatur

- [Hel] Helbing, Dirk: „Verkehrsdynamik“, Springer Berlin, 1997.
- [Lev] Leveque, R.J.: “Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems“, 2002.
- [Li] Li, Tong: “Modelling traffic flow with a time-dependent fundamental diagram“, erschienen in “Mathematical Methods in the Applied Sciences“, John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- [Son] Sonar, Thomas: „Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik“, Vieweg Braunschweig, 2001.
- [You] Yousept, Irwin: „Makroskopische Modellierung von Verkehrsflüssen“, 2004.

# 1 Einleitung

## Was ist Verkehrsdynamik?

Verkehrsdynamik ist die orts- und zeitbezogene Bewegung von Teilnehmern des Straßenverkehrs. Die Untersuchung von Verkehrsdynamik ist eine der wichtigsten Aufgaben der Verkehrswissenschaften. Unter anderem wird nach geeigneten Methoden zur Datenaufnahme, -interpretation und Modellierung von dynamischen Systemen gesucht. Viele Forschungsprojekte werden staatlich gefördert, weil der Verkehr in unserer industrialisierten Gesellschaft eine wirtschaftlich enorm wichtige Rolle spielt.

## Warum untersucht man Verkehrsdynamik? Einige Fakten:

- Deutschland weist einen der weltweit höchsten Motorisierungsgrade auf (540 PKW je 1000 Einwohner).
- Zwischen 1975 und 1995 hat sich das Verkehrsaufkommen bei PKW und LKW verdoppelt, auf Autobahnen sogar verdreifacht.
- Bis 2020 ist mit einem weiteren Anstieg um ca. 40% zu rechnen. Es werden dann 60 Mio. KFZ angemeldet sein.
- Gesamtenergieverbrauch des Verkehrs ist so groß wie jener der Industrie. Der Straßenverkehr ist zu 18% verantwortlich für den Gesamt-CO<sub>2</sub>-Ausstoß, wobei LKW einen überproportionalen Anteil tragen.
- 1/7 aller Arbeitsplätze hängen unmittelbar von der Autoindustrie ab (weitere 1/3 mittelbar).
- Behinderter Verkehr verursacht 10-20% Mehrverbrauch und zusätzliche Emission. Volkswirtschaftlicher Schaden: 120 Mrd. Euro/Jahr.

## Was erwartet man von der Untersuchung der Verkehrsdynamik?

- Dringender Bedarf an Methoden zur Optimierung des Verkehrsflusses, um bestehende Infrastruktur effizienter zu nutzen.
- Verbesserung der Wirtschaftlichkeit und Verringerung der Umweltbelastung durch Beseitigung von Engpässen und gezielten Ausbau der „richtigen“ Straßen.
- Durch den Verkauf intelligenter Verkehrsleitsysteme verspricht man sich europaweit einen jährlichen Umsatz von 100 Mrd. Euro.
- Die Verkehrsdynamik wirft eine Vielzahl spannender Fragen auf, deren exakte wissenschaftliche Behandlung eine Herausforderung ist.

Quellen: [Hel] und Statistisches Bundesamt Deutschland, Stand 2004.

## Verschiedene Ansätze zur Modellbildung

**In den 50 Jahren:** fluiddynamisches Modell von LIGHTHILL, WHITHAM und RICHARDS zur Untersuchung der Ausbreitung von Schockwellen  
(*makroskopische* Sicht)

**In den 50/60 Jahren:** *mikroskopische* Fahrzeugfolge-Modelle  
(Follow-the-Leader-Modell)

**60/70 Jahre:** gaskinetische BOLZMANN-artige Verkehrsmodelle  
(*mesoskopische* Sicht)

**80er/90er:** Verkehrssimulationen am Computer. Dabei unterscheidet man *Mikrosimulationen einzelner Fahrzeuge* und *Simulation makroskopischer Verkehrsgleichungen*.

**Ab ca. 1990:** *Zelluläre Automaten (CA)* zur superschnellen Simulation von mikroskopischen Low-Fidelity-Modellen.

## 2 Mikroskopische Modelle

### 2.1 Fahrzeugfolge-Modelle

Mikroskopische Modelle beschreiben Systeme partikelweise (hier: Partikel sind Fahrzeuge). Sie bilden oft die Grundlage zur Herleitung makroskopischer Systeme (Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$ , mehr dazu später). Wir wollen ein einfaches Fahrzeugfolge-Modell entwickeln:

Sei  $x_i(t) \in \mathbb{R}$  ( $i=1,2,\dots$ ) der Ort des  $i$ -ten Autos zur Zeit  $t$ ,  $v_*(x)$  die zulässige Geschwindigkeit am Ort  $x$ . Wir nehmen an, dass  $x_i$  versucht, die zulässige Geschwindigkeit  $v_*$  zu fahren. Fährt  $x_{i-1}$  vor  $x_i$  (zu jeder Zeit gilt  $x_i < x_{i-1}$ ), muss sich  $x_i$  an dessen evtl. geringere Geschwindigkeit  $\frac{dx_{i-1}}{dt}$  anpassen und zwar umso stärker, je kleiner  $\Delta x = x_{i-1} - x_i > 0$  ist. Demnach scheint

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = (1 - \alpha)v_*(x_i(t)) + \alpha R \frac{dx_{i-1}}{dt}(t) \quad (\text{FF1})$$

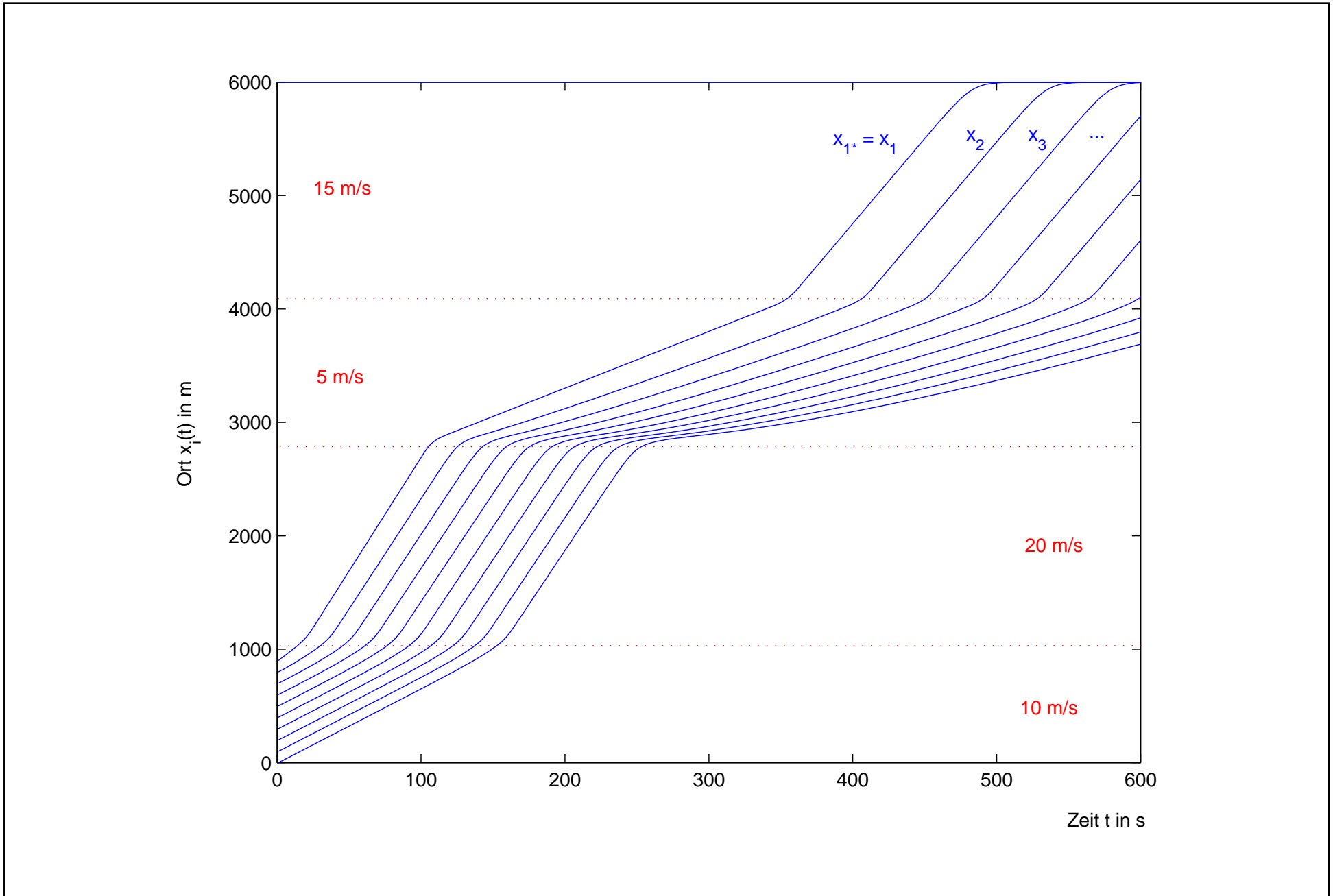
mit  $\alpha = e^{-V\Delta x}$  und  $R, V = \text{const.}$  ein sinnvolles Modell zu sein.

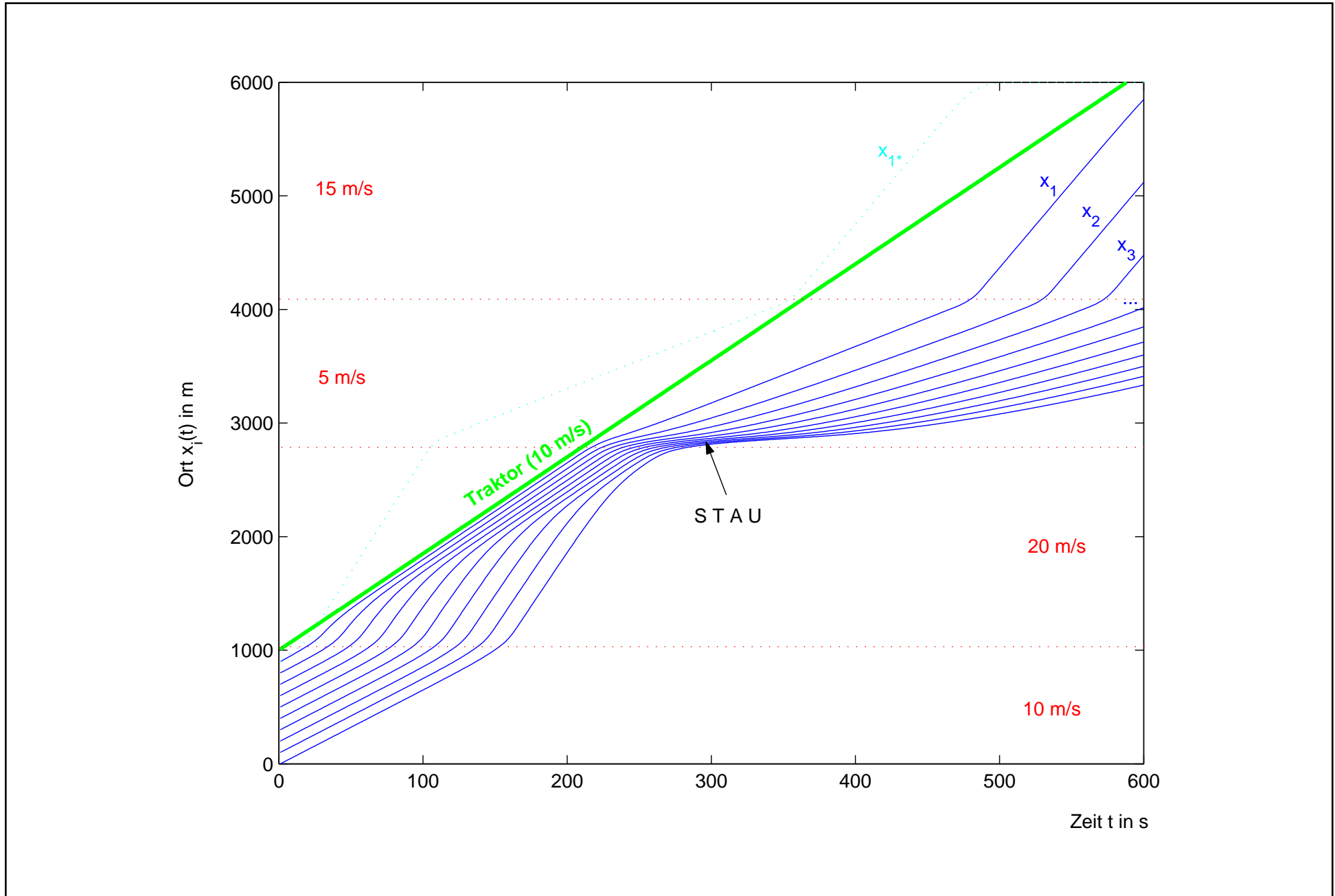
## Bemerkungen.

- **FF1** ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.
- $V > 0$  gibt an, wie stark Fahrer in Abhängigkeit von der Entfernung zum Vorfahrenden von dessen Geschwindigkeit beeinflusst werden.  
Kleines  $V \Rightarrow$  Vorsichtiger.
- $R > 0$  ist ein zur Geschwindigkeit relativer Sicherheitsabstand.  
Kleines  $R \Rightarrow$  größerer Sicherheitsabstand.
- **FF1** impliziert sogar, dass ein über der Richtgeschwindigkeit fahrendes Fahrzeug die Nachfolger ebenfalls leicht zum Rasen verleiten kann.

**FF1** lässt sich für gutartige  $v_*, x_1$  geschlossen lösen. Wir wollen aber realistische Geschwindigkeitsverläufe betrachten, deswegen diskretisieren wir:

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} = (1 - \alpha)v_*(x_i(t)) + \alpha R \frac{x_{i-1}(t + \Delta t) - x_{i-1}(t)}{\Delta t} \quad (\text{FF1}^d)$$

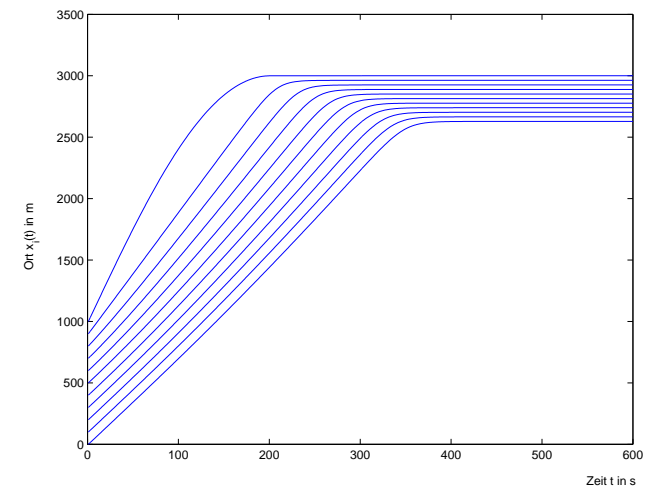
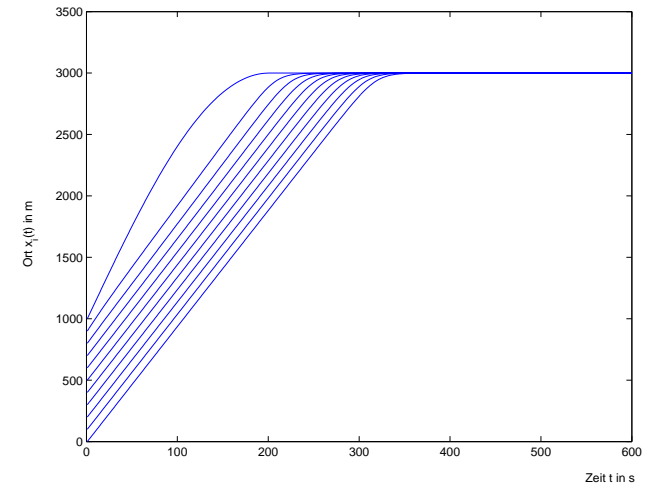




**Bemerkung.** Das einfache Modell verhält sich schon einigermaßen wirklichkeitsnah. Allerdings haben wir nur einen relativen Sicherheitsabstand  $R$  eingeführt, der bei Stillstand eines Fahrzeuges natürlich auf 0 schrumpft (die Trajektorien ziehen sich zusammen).

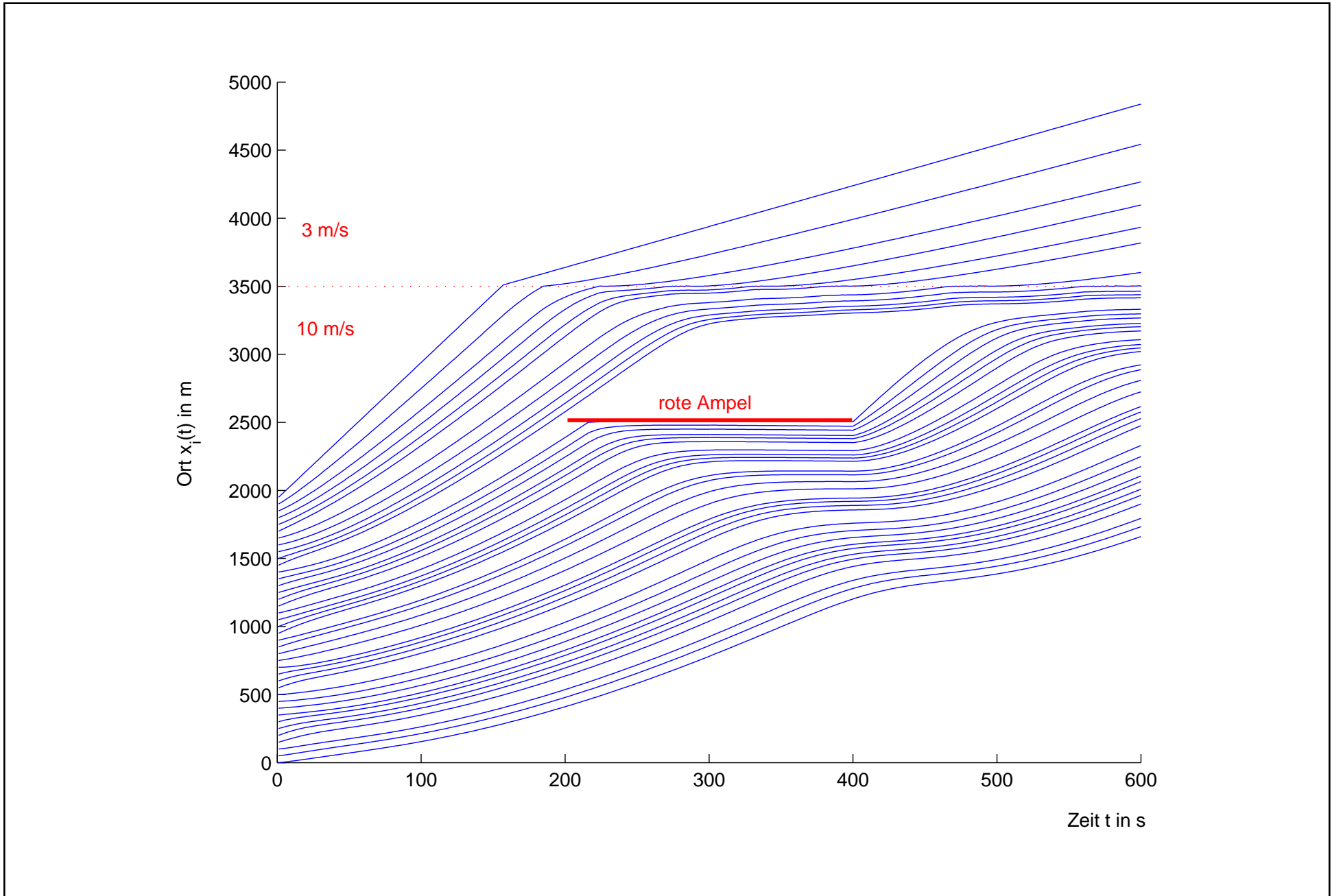
Wir arbeiten deshalb noch einen absoluten Sicherheitsabstand  $A > 0$  ein und erhalten folgendes System:

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = (1 - \alpha)v_*(x_i(t)) + \alpha R \left( \frac{dx_{i-1}}{dt}(t) - A \right) \quad (\text{FF2})$$



Unser Fahrzeugfolge-Modell bietet neben seiner Einfachheit auch den Vorteil, dass die Parameter  $V, R, A$  für jedes Fahrzeug verschieden gewählt werden können, also  $V_i, R_i, A_i$ . Mit geeigneten Verteilungen kann man so simulieren, dass verschiedene Fahrer unterschiedliche Sicherheitsabstände und Voraussicht haben. Zudem kann  $v_*$  orts- und zeitabhängig sein, also  $v_* = v_*(x, t)$ .

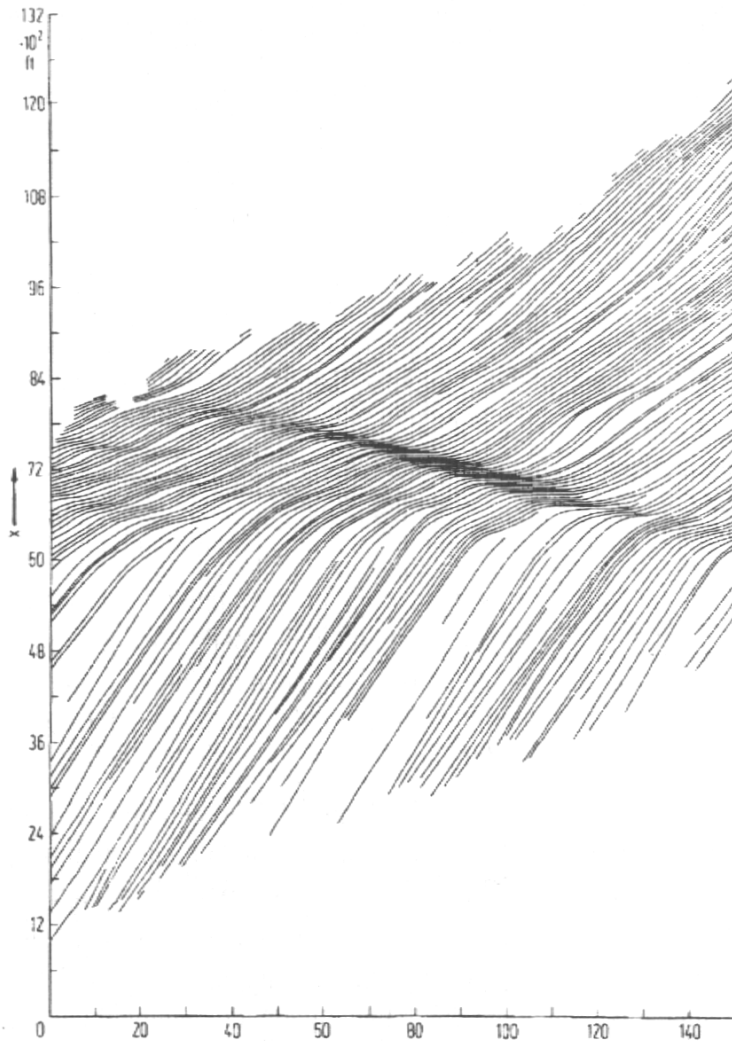
Das folgende Bild zeigt die Verkehrsdynamik an einer Ampel bei  $x = 2500m$ , die zu  $t = 200...400s$  auf Rot geschaltet ist. Die Richtgeschwindigkeit ist bis zu Meter 3500 mit  $10m/s$  und danach mit  $3m/s$  vorgegeben. Die Parameter  $V, R, A$  wurden für jede Trajektorie zufällig gewählt.



**Bemerkung:** Es müsste noch untersucht werden, für welche Wahl von  $V, R, A$  die Bedingung  $\frac{dx_i}{dt} \geq 0$  gilt. Es kann sonst tatsächlich vorkommen, dass Fahrzeuge wegen zu geringen Sicherheitsabstandes rückwärts fahren...

### Wie beurteilt man die Qualität eines Modells?

Man vergleicht das Modellierungsergebnis mit der Wirklichkeit. Tatsächlich ist es aber sehr schwierig,  $x(t)$ -Beziehungen für viele Fahrzeuge aus dem realen Straßenverkehr zu ermitteln. Messdaten werden z.B. von Videokameras an Autobahnbrücken oder Induktionsspulen (in Straße eingearbeitet) geliefert. Eine großräumige Erfassung ist dagegen nur per Hubschrauber, Satellit o.ä. möglich. Dementsprechend ist hier die Datenbasis sehr dünn.



**Abb. 11.1.** Trajektorien von Fahrzeugen, wie sie von Treiterer *et al.* [444] aus Luftaufnahmen gewonnen wurden. Plötzlich endende oder beginnende Linien sind durch Spurwechsel bedingt. Die Zeit  $t$  (in s) ist nach rechts aufgetragen, der Ort  $x$  (in 100 ft) nach oben. Daher entspricht die Steigung der Linien gerade der Geschwindigkeit der Fahrzeuge (in 100 ft/s). Deutlich erkennbar ist die Ausbildung einer Stop-and-Go-Welle, die sich entgegen der Fahrtrichtung ausbreitet (aus [268]).

Quelle: [Hel], S. 76

## Anfahrt an grüner Ampel

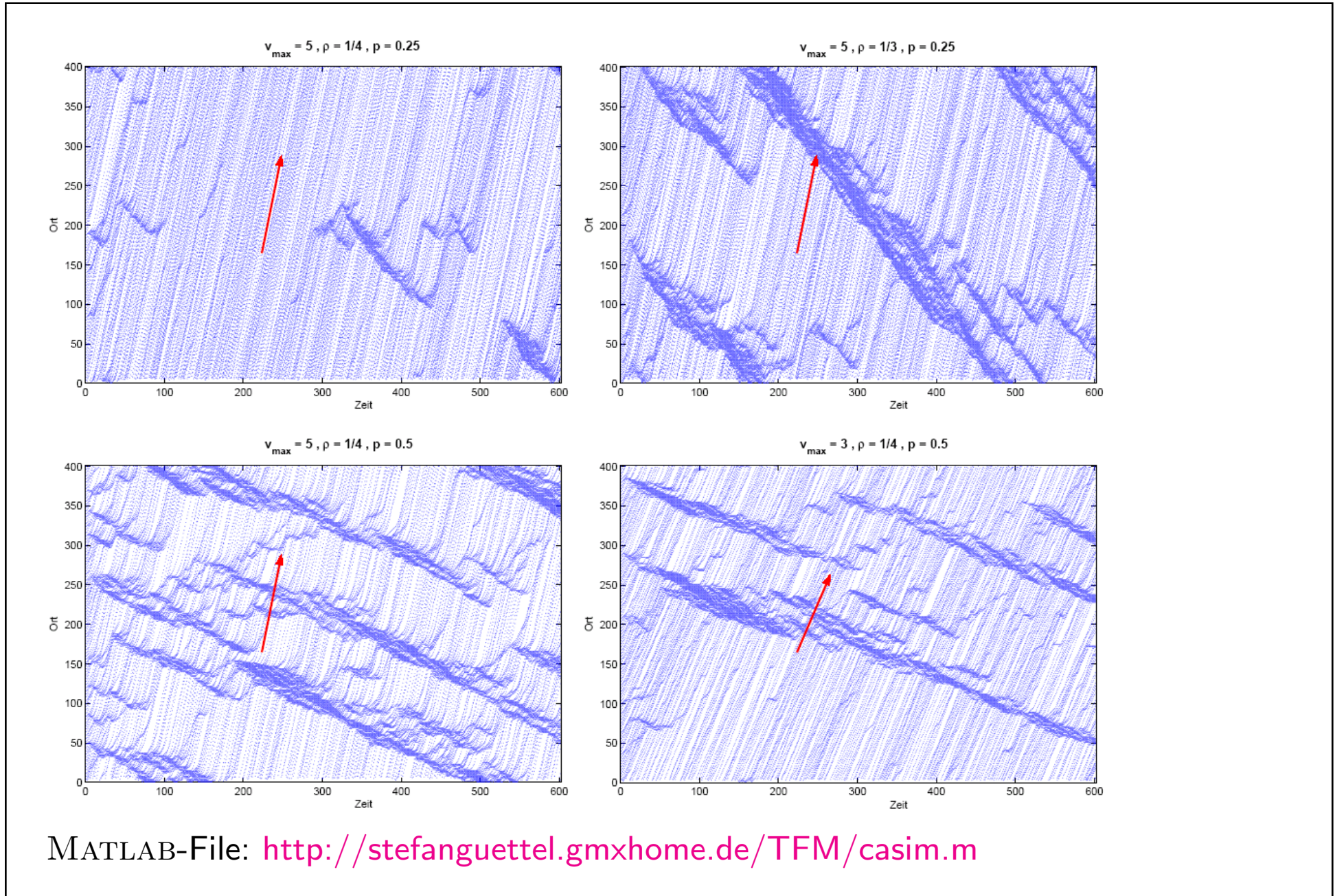
## Auflösung eines Staus

Quelle: [Lev]

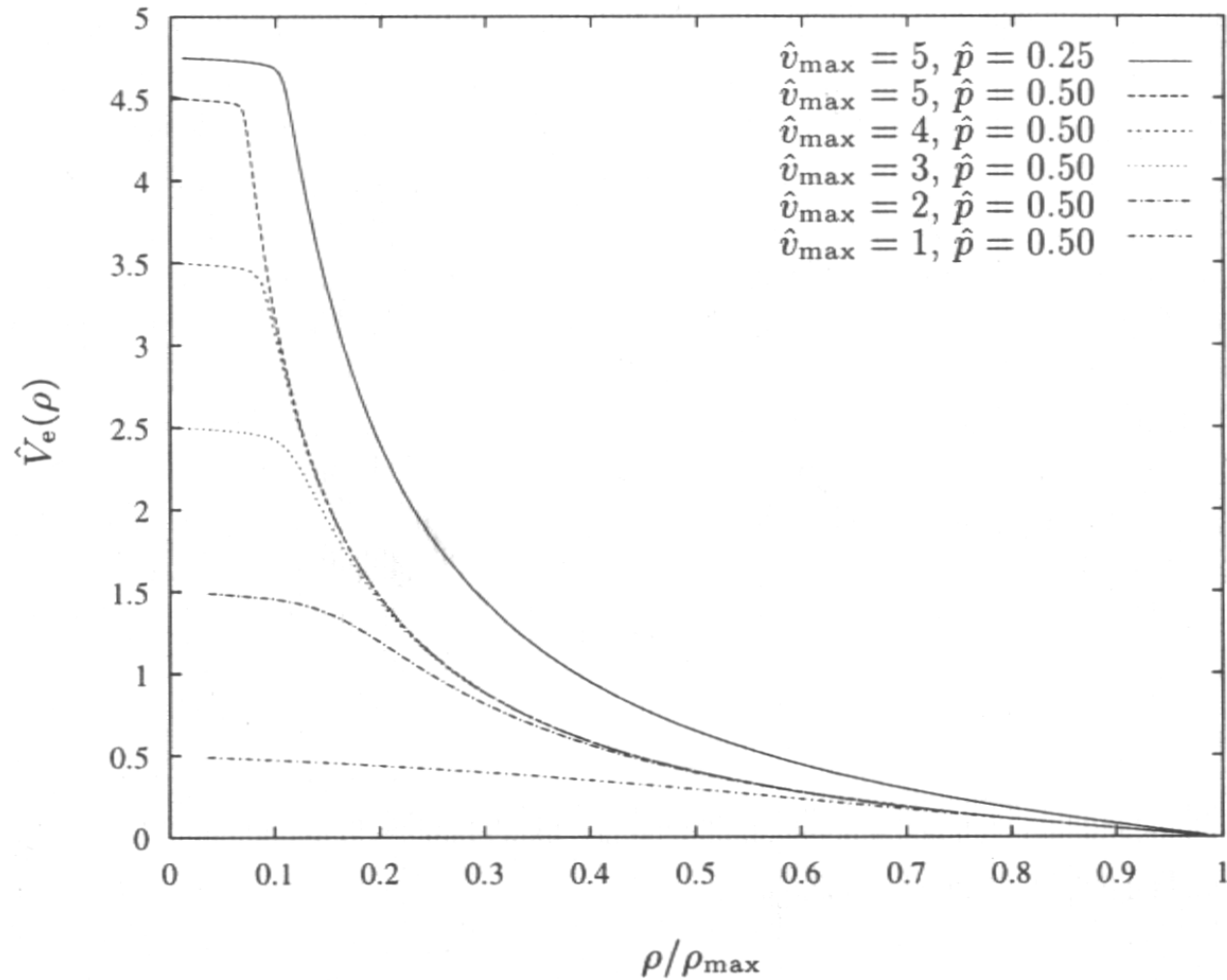
## 2.2 CA-Modelle

Bei den CA-Modellen (von Cellular Automata) wird das Straßennetz in kleine Zellen zerlegt. Wir betrachten ein Schnellstraßenmodell nach NAGEL und SCHRECKENBERG. Dort sind die Zellen alle gleich groß (z.B.  $\Delta x = 7,5m$ ) und können entweder mit einem Fahrzeug belegt oder leer sein. Jedes Fahrzeug besitzt eine eigene Geschwindigkeit  $v \in \{0, 1, 2, \dots, v_{max}\}$ . In jedem Zeitschritt  $\Delta t$  werden Geschwindigkeit und Ort für jedes Fahrzeug anhand folgender Regeln angepasst:

- 1. Beschleunigung:** Wenn  $v < v_{max}$ , dann  $v := v + 1$ .
- 2. Abbremsen:** Sei  $d$  der Abstand des betrachteten Fahrzeuges zum vorderen Fahrzeug ( $d$  ganzzahlig!). Setze  $v := \min\{d - 1, v\}$ .
- 3. Zufall:** Sei  $X \sim \text{glm}[0, 1]$ . Wenn  $X < \hat{p}$ , dann  $v := v - 1$  ( $\hat{p}$  gegeben).
- 4. Bewegung:** Bewege das Fahrzeug um  $v$  Zellen vorwärts.



## Zusammenhang $\rho$ , $v_{max}$ , $\hat{p}$ und Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_*$ .



Quelle: [Hel], S. 117

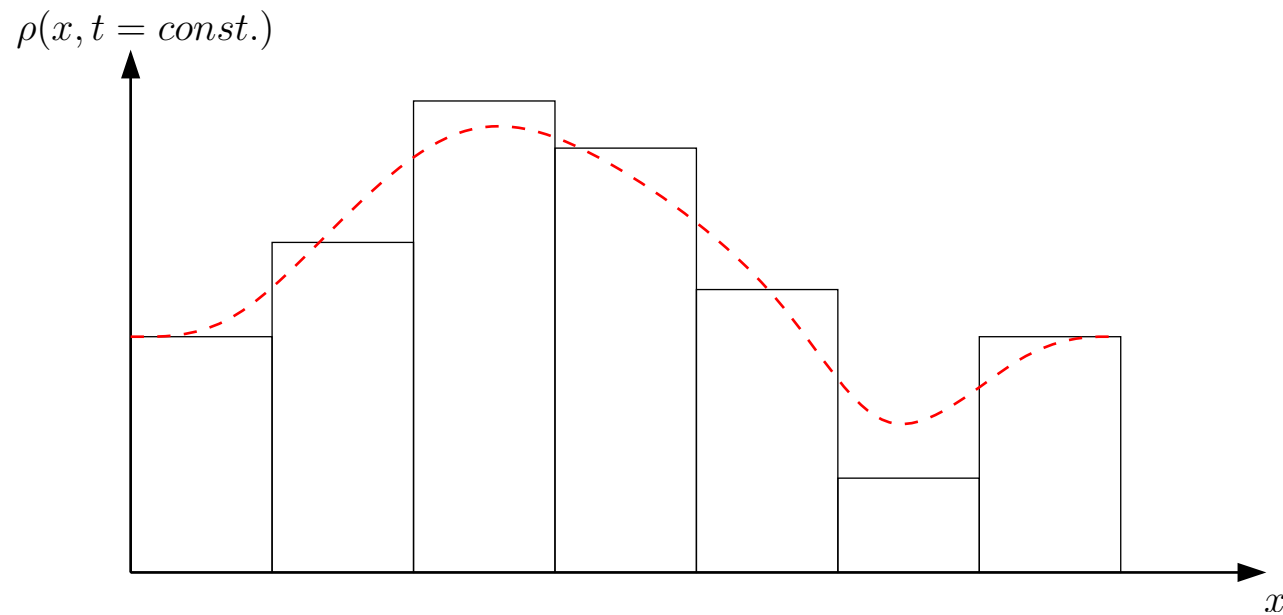
## 3 Makroskopische Modelle

### 3.1 Fluss und Dichte

Wir wollen uns nun davon lösen, Fahrzeuge einzeln zu betrachten und wenden uns fluiddynamischen Modellen zu. Es ist zu empfehlen, sich den Verkehrsfluss ab jetzt als eine strömende Flüssigkeit vorzustellen. Diese fließt entlang der reellen Achse  $\mathbb{R}$  - unsere Straße - in Richtung  $+\infty$ . Dabei sind nicht die einzelnen Teilchen interessant, sondern im Wesentlichen nur die **Strömungsgeschwindigkeit**  $v(x, t)$  und die **Dichte**  $\rho(x, t)$  am Ort  $x$  zur Zeit  $t$ .

Interpretation der Dichte für hinreichend kleine  $\Delta x$ :

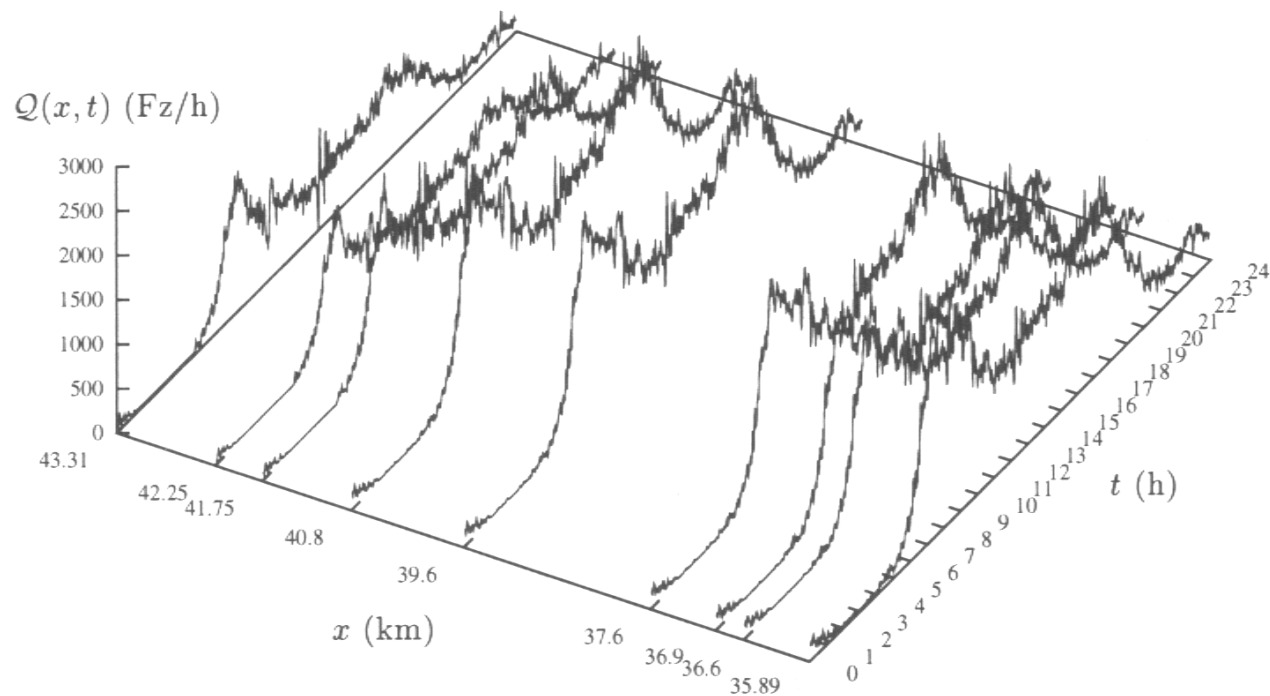
$$\rho(x, t) \approx \frac{\text{Anzahl der Autos in } [x, \Delta x] \text{ zur Zeit } t}{\Delta x}.$$



**Bemerkung.** Auch wenn die Daten aus punktwisen Messungen (z.B. Verkehrszählungen) stammen, ist es für eine weitere analytische Untersuchung notwendig, für  $v$  und  $\rho$  eine gewisse Glattheit zu fordern. Hier:  
 $v(x, t), \rho(x, t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ .

Eine weitere wichtige Kenngröße ist der **Verkehrsfluss**  $q(x, t)$ . Dieser gibt an, wieviele Autos pro Zeiteinheit den Ort  $x$  durchfahren (zur Zeit  $t$ ), also

$$q(x, t) \approx \frac{\text{Anzahl Autos am Messpunkt } x \text{ während } [t, t + \Delta t]}{\Delta t}.$$



Quelle: [Hel], S. 80

**Bemerkung.** Im Allgemeinen wird gefordert:  $q(x, t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ . Zwischen den Größen  $v$ ,  $\rho$  und  $q$  besteht zur jeder Zeit und an jedem Ort ein fundamentaler Zusammenhang, der auch **Flussbedingung** genannt wird:

$$q(x, t) = \rho(x, t)v(x, t), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{FB})$$

## 3.2 Ein Erhaltungssatz

Die Anzahl der Fahrzeuge im Intervall  $[a, b]$  zur Zeit  $t$  ist

$$N(t) := \int_a^b \rho(x, t) dx.$$

Ist  $N(t_1) \neq N(t_2)$ , so müssen während  $[t_1, t_2]$  entweder Autos bei  $x = a$  in den Streckenabschnitt  $[a, b]$  eingefahren sein, oder Autos haben diesen bei  $x = b$  verlassen (=: Erhaltungsbedingung EB). Die Anzahl der Autos, die in  $[t_1, t_2]$  eine Stelle  $x$  durchfahren ist aber gerade

$$\int_{t_1}^{t_2} q(x, t) dt,$$

so dass wir EB formulieren können als

$$\int_{t_1}^{t_2} q(a, t) - q(b, t) dt = \int_a^b \rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) dx.$$

Sind  $\rho, q$  hinreichend glatt, gilt dann auch

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b q_x(x, t) dx dt = \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \rho_t(x, t) dt dx.$$

Nach dem Satz von Fubini kann man schreiben

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b q_x(x, t) + \rho_t(x, t) dx dt = 0 \quad (3.1)$$

und weil (3.1) für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  erfüllt ist, erhalten wir schließlich die sog. **Kontinuitäts-Gleichung**

$$\rho_t(x, t) + q_x(x, t) = 0. \quad (\text{Kon})$$

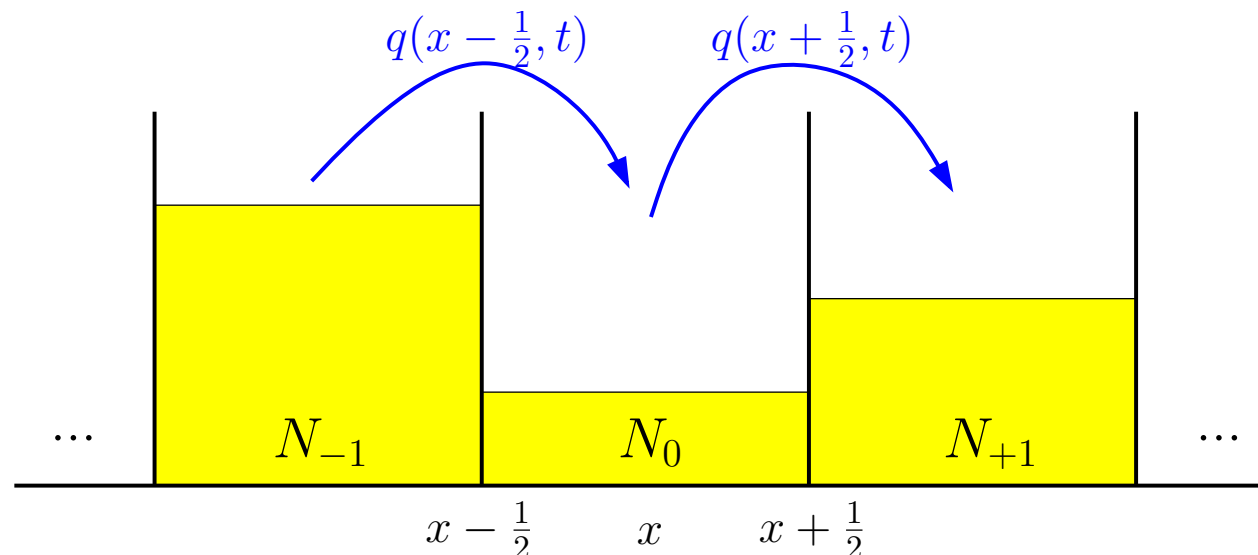
(Kon) sichert also die kontinuierliche, verlustfreie Strömung des Verkehrs und ist in jedem makroskopischen Modell wenigstens implizit enthalten.

Beachtet man, dass

$$\frac{d}{dt}N(t) = q(a, t) - q(b, t)$$

gilt, so kann man sich (**Kon**) anhand ihrer Diskretisierung veranschaulichen (Diskretisierungsparameter  $\Delta x = 1$ ,  $\Delta t = 1$ ):

$$N(t + 1) = N(t) + q(x - \frac{1}{2}, t) - q(x + \frac{1}{2}, t)$$



Mit (FB) können wir (Kon) als

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (\text{Kon}')$$

schreiben. Wäre uns also die Geschwindigkeit  $v$  bekannt, könnten wir die Entwicklung der Verkehrsdichte verfolgen. Wir müssen unser Modell also noch dadurch erweitern, dass wir die Geschwindigkeit  $v$  in irgendeinen funktionellen Zusammenhang bringen...

### 3.3 Lighthill-Whitham-Richards-Modell

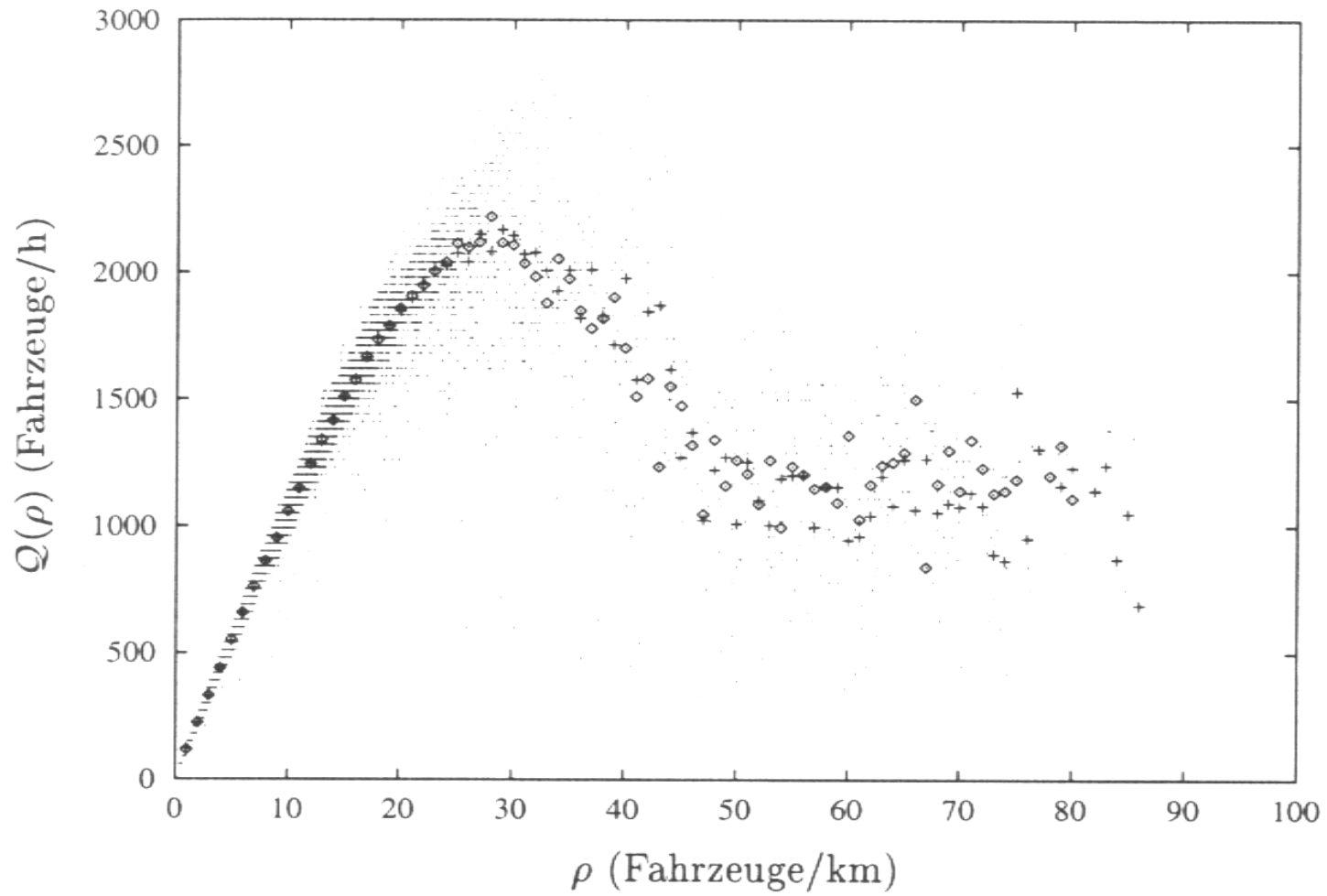
Das LIGHTHILL-WHITHAM-RICHARDS-Modell (LWR-Modell) ist nichts weiter als eine Spezialisierung von (Kon) und war eines der ersten untersuchten Verkehrsmodelle. Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit  $v$  nur von der Verkehrsdichte  $\rho(x, t) \leq \rho_{max}$  abhängt, d.h.  $v = v(\rho)$ .

**Beispiel:**  $v(\rho) = v_{max} (1 - \rho/\rho_{max})$ .

Da  $q = \rho v$  (vgl. **FB**), ist nunmehr  $q = q(\rho)$  und (**Kon**) reduziert sich auf die **LWR-Gleichung**

$$\rho_t + [q(\rho(x, t))]_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho_t + q'(\rho)\rho_x = 0. \quad (\text{LWR})$$

Die Abbildung  $\rho \mapsto q$  wird im sogenannten **Fundamentaldiagramm** dargestellt, dass für reale Systeme empirisch aufgestellt werden kann...



Quelle: [Hel], S. 87

Es liegt nahe,  $q$  als konkav in  $\rho$  anzunehmen, also  $q''(\rho) < 0$ . Die meisten Modelle arbeiten mit dieser Annahme und es gibt dafür eine umfangreiche Theorie. Aktuelle Bemühungen der mathematischen Forschung sind, das Fundamentaldiagramm auch zeitabhängig zu machen (also  $q = q(\rho, t)$ ) und ohne die Konkavität auszukommen (vgl. Abschnitt 3.5).

**Definition [Hyperbolische DGL].**

Der Erhaltungssatz  $u_t + f(u)_x = 0$  mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **hyperbolisch**, wenn die Eigenwerte  $\lambda_1(u), \lambda_2(u), \dots, \lambda_n(u)$  der Jakobimatrix  $J_f(u)$  reell sind für alle  $u \in \mathbb{R}^n$ . Er heißt strikt hyperbolisch, wenn  $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_n(u)$  für alle  $u \in \mathbb{R}^n$ .

**Folgerung:** (LWR) ist eine hyperbolische DGL.

## 3.4 Charakteristiken

Ein wesentliches Merkmal von hyperbolischen Differentialgleichungen ist die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Dichte-Störungen entlang von Kurven, den sog. Charakteristiken. Mit der *Methode der Charakteristiken* kann man also ein Problem über der Ort-Zeit-Ebene in eine Mannigfaltigkeit von Problemen über Kurven in dieser Ebene transformieren. Diese Probleme sind dann gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir betrachten das LWR-AWP

$$\rho_t + q'(\rho(x, t))\rho_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

und die gewöhnliche DGL

$$x'(t) = q'(\rho(x, t)) = 0, \quad x(0) = x_0. \quad (\text{GDG})$$

**Definition [Charakteristik].**

$\chi = \{ x(t) \in C^1 \mid x(t) \text{ löst (GDG) mit } x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \}$  heißt Charakteristikenmenge von (LWR-AWP).  $x(t) \in \chi$  heißt charakteristische Kurve.

**Bemerkung.** Ist  $q'(\rho)$  stetig differenzierbar auf  $[0, \rho_{max}]$  ist  $q'$  Lipschitz-stetig und damit hat (GDG) mit Anfangswert  $x(0) = x_0$  eine eindeutig bestimmte maximale Lösung (Picard-Lindelöf).

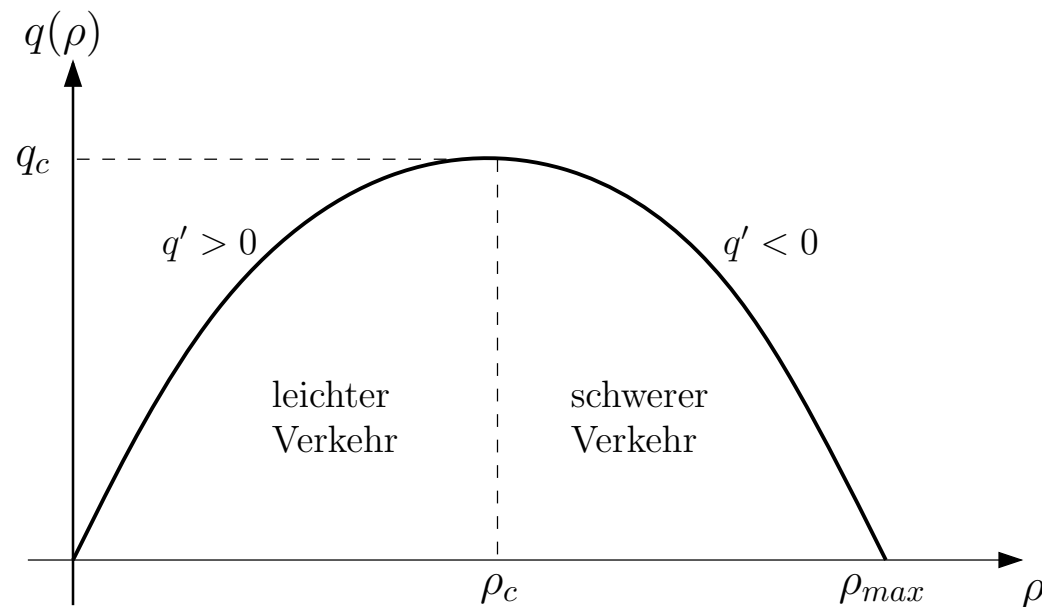
**Folgerungen.**

- Die charakteristischen Kurven von (LWR-AWP) sind Niveaulinien von  $\rho$ , also Transportwege von Dichtewellen:

$$\frac{d}{dt} \rho(x(t), t) = \rho_t + x'(t) \rho_x = \rho_t + q'(\rho(x, t)) \rho_x = 0.$$

- Gilt für  $x_1(T) = x_2(T)$  für  $x_1, x_2 \in \chi$ ,  $T \geq 0$ , dann gilt  $x_1(t) = x_2(t)$  auch für alle  $t > T$ .

- Die Transportgeschwindigkeit der Dichtewellen (*Schockgeschwindigkeit*) ist  $\lambda_* := x'(t) = q'(\rho)$  und kann sowohl positiv (Dichtewelle läuft in Fahrtrichtung. Man spricht von *leichtem Verkehr*), als auch negativ sein (Ausbreitung der Dichtewelle entgegen der Fahrtrichtung  $\Rightarrow$  *schwerer Verkehr*).



- $\rho_c$  mit  $q'(\rho_c) = 0$  nennt man *kritische Dichte*, hier wird der Verkehrsfluss maximal.
- Diese Begriffe sind natürlich nur für konkave Fundamentalgraphen bildbar.

**Beispiel 1.** Ist  $c = q'(\rho(x, t)) = \text{const.}$  sind die charakteristischen Kurven von (LWR-AWP) Geraden  $x(t) = ct + x_0$  und die Lösung hat die Form  $\rho(x, t) = \rho_0(x - ct)$ . Die Anfangsdichte wird mit Geschwindigkeit  $c$  transportiert. Deswegen wird  $\rho_t + c\rho_x = 0$  häufig als *Transportgleichung* bezeichnet.

**Beispiel 2.** Wir betrachten das AWP

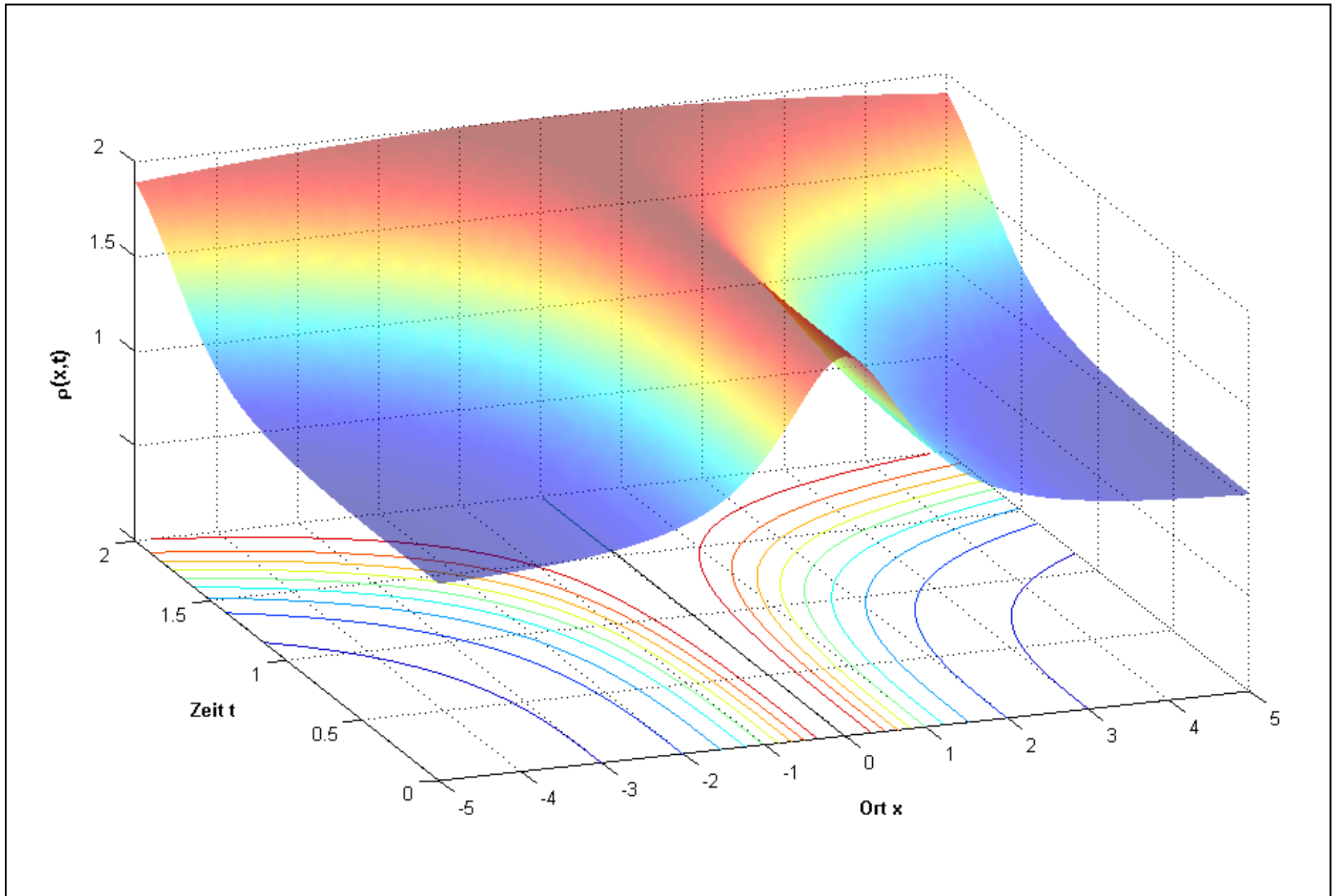
$$\rho_t + xt^2\rho_x = 0, \quad \rho_0(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}. \quad (3.4)$$

Die Charakteristiken sind Lösungen von  $x'(t) = xt^2$ ,  $x(0) = x_0$ , also  $x(t) = x_0 \exp(\frac{1}{3}t^3)$ , bzw.  $x_0 = x \exp(-\frac{1}{3}t^3)$  (\*).

$\rho(x(t), t)$  ist konstant für alle  $t$ . Also gilt  $\rho(x(t), t) = \rho(x_0, 0) = \rho_0(x_0)$ .

Einsetzen von (\*) in  $\rho_0$  liefert die gesuchte Lösung von (3.4)

$$\rho(x, t) = 1 + \frac{1}{1 + x^2 \exp(-\frac{2}{3}t^3)}.$$



## 3.5 Zeitabhängiges Fundamentaldiagramm

Wir wollen kurz ein modernes Modell betrachten, wie es von TONG LI (vgl. [Li]) 2004 vorgestellt wurde und welches einen zeitabhängigen Fluss  $q(\rho, t)$  zulässt, der auch nicht konkav in  $\rho$  sein muss. Zeitabhängigkeiten können entstehen durch

- Wetterbedingungen oder Sichtverhältnisse (Tag/Nacht),
- teilweise Strassensperrungen oder sonstige Hindernisse,
- Verkehrsleitsysteme, Verkehrsumleitungen, ...

LI's Modell hat die Form

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (3.5)$$

$$v_t + vv_x + \rho v_{*\rho}(\rho, t)v_x = \frac{v_*(\rho, t) - v}{\tau(\rho)} + v_{*t}(\rho, t) \quad (3.6)$$

$$\text{AW: } (\rho(x, 0), v(x, 0)) = (\rho_0(x), v_0(x)). \quad (3.7)$$

Die Gleichung (3.5) entspricht genau (**Kon'**) (Seite 28), bedarf also keiner weiteren Erklärung.

Interessanter ist Gleichung (3.6). Darin bezeichnet  $v_*(\rho, t)$  die *Gleichgewichtsgeschwindigkeit*, die sich bei einem gleichmässigen Fluss ohne Dichtestörungen einstellt (vgl. CA-Modelle, Seite 20). Es wird angenommen, dass  $v_*$  stetig diffbar und echt fallend in  $\rho$  ist:

$$v_{*\rho}(\rho, t) < 0.$$

Die Größe  $\tau(\rho)$  ist ein *Relaxations-Parameter*, der als Reaktionsgeschwindigkeit der Autofahrer interpretiert werden kann. Untersuchungen haben gezeigt, dass dichter Verkehr das Reaktionsvermögen herabsetzt (*frustration effect*), also  $\tau_\rho > 0$ . Für  $\tau \rightarrow 0$  reduziert sich (3.6) zu  $v = v_*$ . Damit geht das System [(3.5), (3.6), (3.7)] über in (**LWR**), nur mit  $q = q(\rho, t) = \rho v_*(\rho, t)$ .

Wie auf Seite 34 (Charakteristiken) herausgearbeitet, ist die charakteristische Geschwindigkeit

$$\lambda_*(\rho, t) := q_\rho(\rho, t) = \rho v_{*\rho}(\rho, t) + v_{*t}(\rho, t).$$

Wir betrachten nun ein Fahrzeug-Folge-Modell (vgl. Seite 7)

$$\tau(\rho)x_n''(t) = x_{n-1}'(t) - x_n'(t) + \tau(\rho)v_{*t}(\rho, t)$$

mit  $\Delta x = x_{n-1}(t) - x_n(t) > 0$ . Völlig gleichwertig dazu ist

$$\tau(\rho) \frac{d}{dt} v(x, t) = v(x + \Delta x, t) - v(x, t) + \tau(\rho)v_{*t}(\rho, t).$$

Taylor-Entwicklung von  $v(x + \Delta x, t)$  liefert schließlich in 1. Näherung

$$v_t + v v_x = v_x(x, t) \frac{\Delta x}{\tau(\rho)} + v_{*t}(\rho, t). \quad (3.8)$$

Bleibt also noch das  $\Delta x$  zu eliminieren...

Der Term  $\frac{\Delta x}{\tau(\rho)}$  ist die Geschwindigkeit der Dichtestörungen, die nur aufgrund der positiven Reaktionszeit  $\tau(\rho)$  entstehen. Störungen können sich aber niemals schneller als der Verkehr fortpflanzen, deswegen können wir setzen:

$$\frac{\Delta x}{\tau(\rho)} = -(\lambda_*(\rho, t) - v_*(\rho, t)) = -\rho v_{*\rho}(\rho, t) > 0 \quad (3.9)$$

Das ist also die Geschwindigkeit der Dichtewellen relativ zur Gleichgewichtsgeschwindigkeit. Nach Einsetzen von (3.9) in (3.8) erhält man die gewünschte Gleichung (3.6).

LI konnte für dieses Modell die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zeigen, wenn  $q(\rho)$  von beschränkter Variation ist.