

Bitmatrizen und 'Paint by Numbers'

Technische Universität Bergakademie Freiberg

1 Einleitung

Gegeben: Bitmatrix $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$.

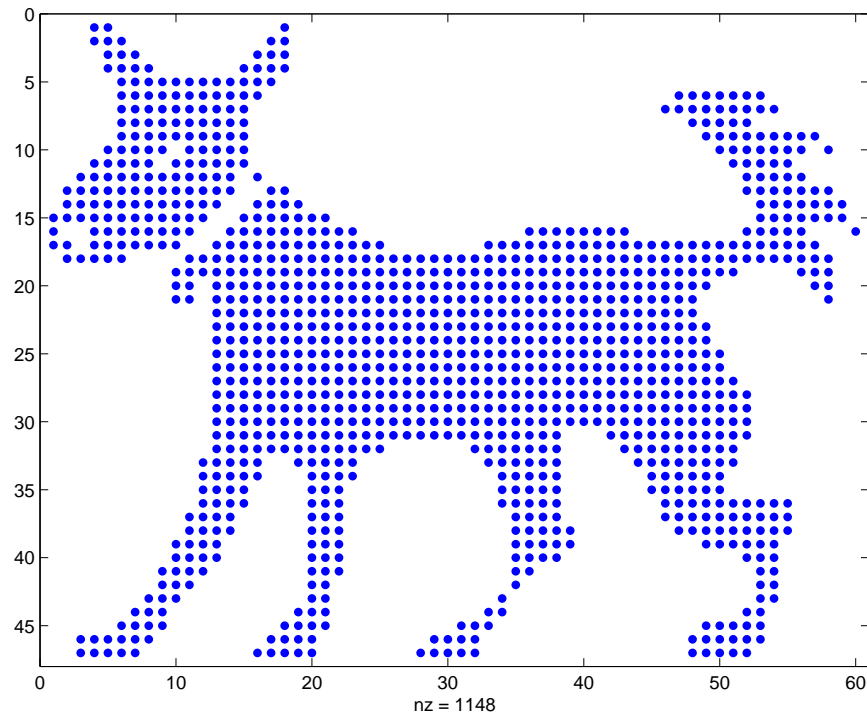


Abbildung 1: 47×60 – Bitmatrix

Verwendung: Darstellung von 'Bildern' als Bitmuster.

Betrachten jetzt eine Zeile $z = A(\cdot, \cdot) \in \{0, 1\}^n$ der Bitmatrix.

Definition [Block, Länge, Signatur, Signaturbreite].

Eine längstmögliche Aufeinanderfolge von gleichen Werten in der Zeile z heißt *Block* (*1-Block* B_i bzw. *0-Block* N_i) mit der *Länge* $|B_i|$ bzw. $|N_i| \in \mathbb{N}$.
Der Vektor $\sigma = S(z) = [|B_1|, |B_2|, \dots, |B_b|]$ heißt (*1-Zeilen-*)*Signatur*.
Die Anzahl der 1-Blöcke in z heißt *Signaturbreite* b .



Abbildung 2: Bitvektor

Bemerkungen. Alle 4 Begriffe sollen analog für Spaltenvektoren

$s = A(:, \cdot) \in \{0, 1\}^m$ definiert sein.

Es gilt $1 \leq |B_i|$ ($i = 1, 2, \dots, b$) und $1 \leq |N_j|$ ($j = 2, 3, \dots, b$) bzw. $0 \leq |N_j|$ für $j \in \{1, b + 1\}$ und $\sum_{i=1}^b (|B_i| + |N_i|) + |N_{b+1}| = n$.

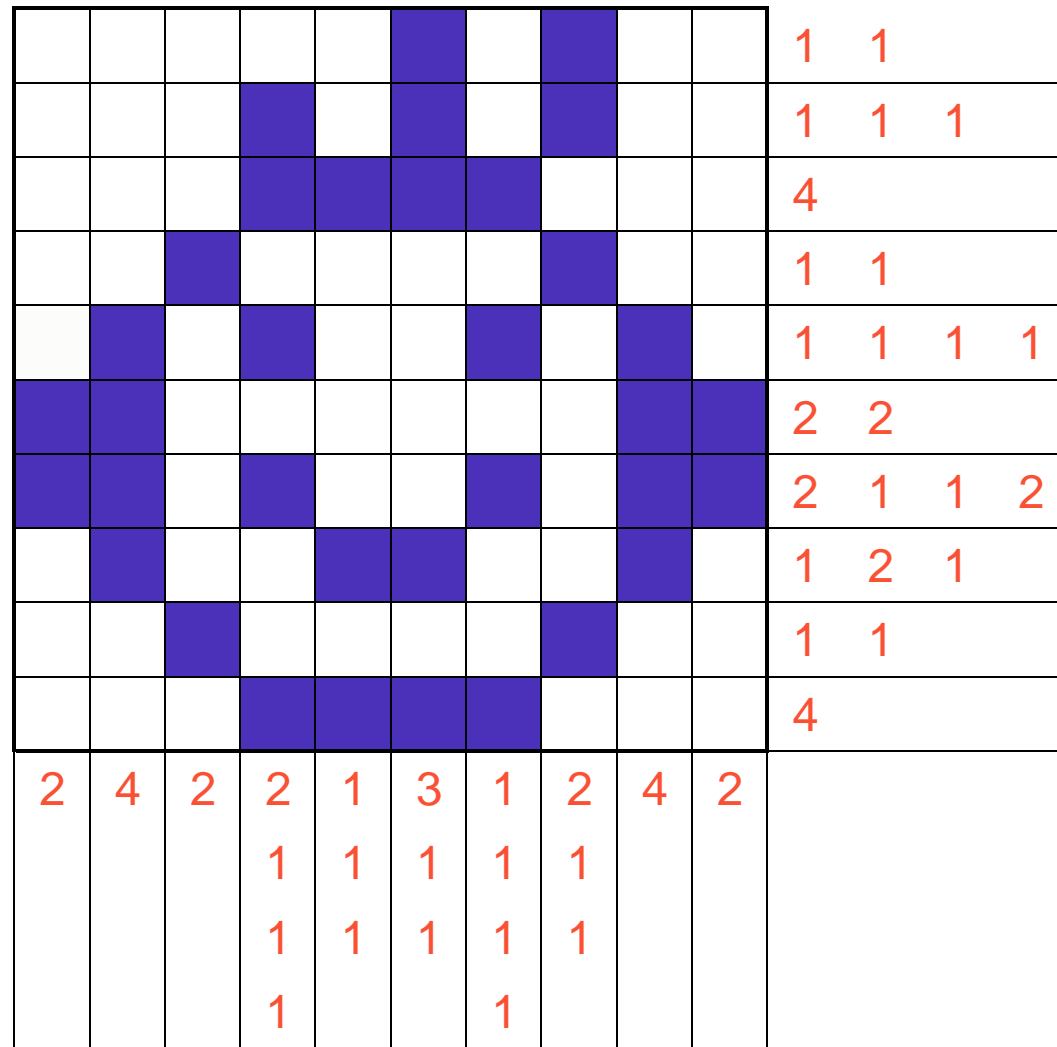


Abbildung 3: Bitmatrix und ihre Signaturen

										1	1		
										1	1	1	
										4			
										1	1		
										1	1	1	1
										2	2		
										2	1	1	2
										1	2	1	
										1	1		
										4			
2	4	2	2	1	3	1	2	4	2				
			1	1	1	1	1						
			1	1	1	1	1						
			1			1							

Abbildung 4: Signaturen

2 Fragen

- Lösbarkeit: Signatur \longrightarrow Bitmatrix? (Konsistenz der Signaturen)
- Eindeutigkeit?
- Algorithmen?
- Aufwand?
- Anwendungen?

			2
1		1	

3 Eindeutigkeit

Offensichtlich: Jede Bitmatrix besitzt genau eine Signatur, denn $S : \{0, 1\}^n \ni z \mapsto \sigma \in \mathbb{N}^b$, wenn z Signaturbreite b hat (vgl. Seite 3).

Aber: Im Allgemeinen keine Eineindeutigkeit, denn

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

haben dieselbe Signatur.

Frage: Wieviele Vektoren z haben dieselbe Signatur σ ?

3.1 Bestimme $|S^{-1}(\sigma)|$

$z_1, z_2 \in S^{-1}(\sigma)$ können sich nur durch ihre 0-Blöcke unterscheiden.

Bestimmen also Anzahl der möglichen 0-Signaturen $[|N_1|, |N_2|, \dots, |N_{b+1}|]$ mit $1 \leq |N_j|$ ($j = 2, 3, \dots, b$) bzw. $0 \leq |N_j|$ für $j \in \{1, b+1\}$.

Ist $L := \sum_{i=1}^b |B_i|$, dann muss gelten

$$\sum_{i=1}^{b+1} |N_i| = n - L.$$

Gesucht ist Anzahl möglicher Partitionen (Reihenfolge wichtig!) der Zahl $n - L$ in $b + 1$ Summanden. Äquivalent: Gesucht ist die Anzahl der injektiven Abbildungen von $D = \{1, 2, \dots, b\}$ nach $R = \{1, 2, \dots, n - L + 1\}$, wobei D permutiert werden darf.

$$\overset{\wedge}{1} + \overset{\wedge}{2} + \overset{\wedge}{3} + \dots + \overset{\wedge}{b-1} \hat{b} = n - L$$

Satz 3.1

Sei $z \in \{0, 1\}^n$ eine Bit-Zeile mit Signaturbreite b und $L := \sum_{i=1}^b |B_i|$.
Dann haben (einschließlich z)

$$|S^{-1}(S(z))| = \binom{n - L + 1}{b}$$

Bit-Zeilen dieselbe Signatur.

Folgerung: Ist $A = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T \in \{0, 1\}^{m \times n}$ und b_i und L_i ($i = 1, 2, \dots, m$) gemäß Satz 3.1 für jede Zeile z_i definiert, dann erfüllen

$$\prod_{i=1}^m \binom{n - L_i + 1}{b_i} \quad (\text{P})$$

Matrizen (inkl. A) alle Zeilensignaturen von A .

4 Lösungs-Algorithmen

4.1 Iteration

Idee: Bestimme eine Start-Bitmatrix A_0 , die alle 1-Zeilensignaturen erfüllt. Durch zeilenweises Verschieben der 1-Blöcke (Beibehaltung der Signatur) erhält man Folge A_1, A_2, \dots , wobei jedes Folgenglied auf Erfüllung der Spaltensignaturen geprüft wird.

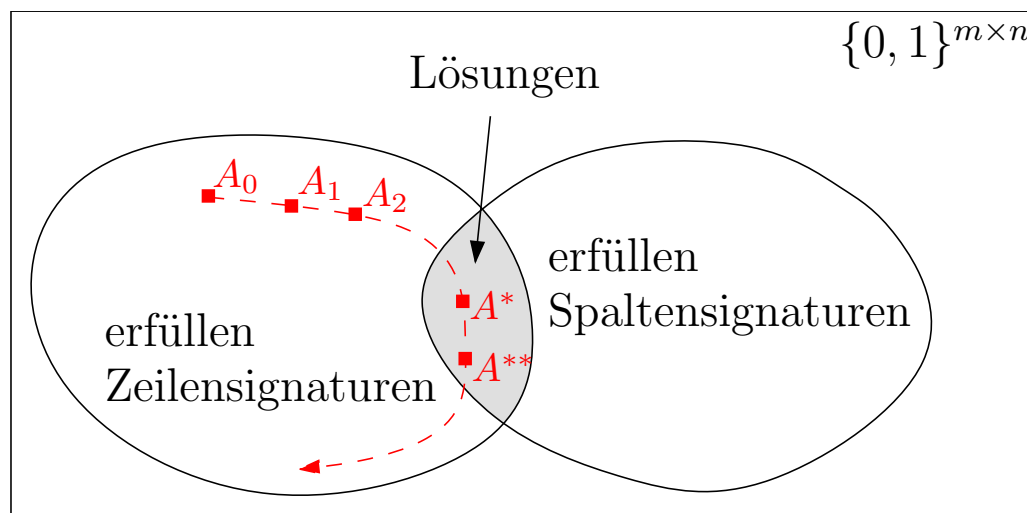
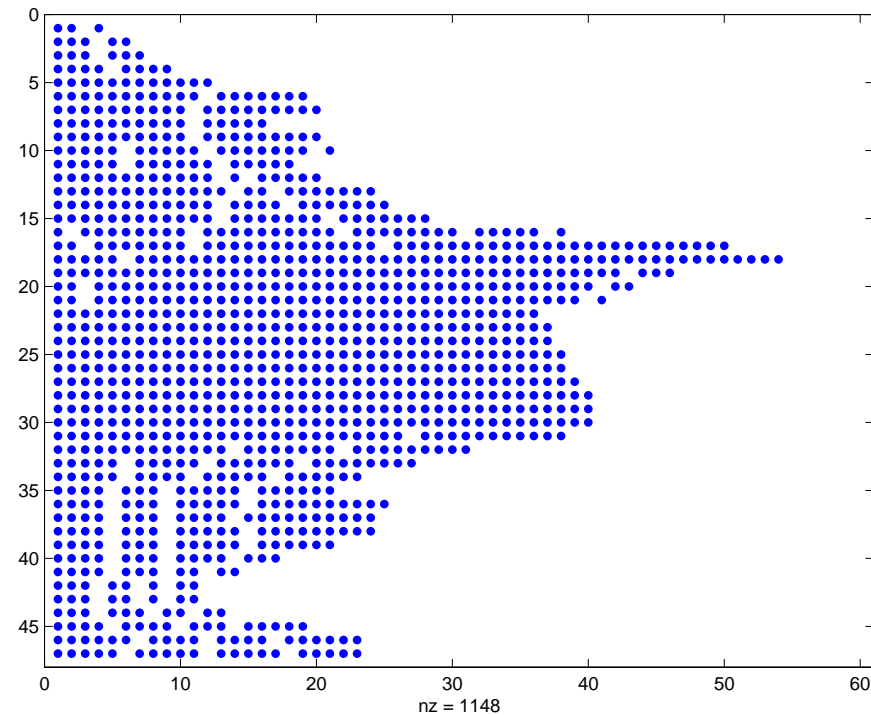


Abbildung 5: Raum der Bitmatrizen

Beispiel: Geeignetes A_0 zu Abbildung 1.



Aus Formel (P): Es sind $8.5790 * 10^{164}$ Iterationsschritte notwendig!

Bei spaltenweiser Verschiebung sind es $2.1666 * 10^{153}$.

Exponentielles Wachstum der Komplexität mit m, n .

Verfahren in dieser Form nicht anwendbar!

4.2 Verbesserte Iteration

Vorgehen:

1. Erzeuge A_0 durch zeilenweises Verschieben aller 1-Blöcke nach links.
2. $A := A_0, j := 1$.
3. Verschiebe Zeilen ab Spalte j nach rechts, so dass Spaltensignatur erfüllt.
möglich: Speichern: $\tilde{A}_j := A. j := j + 1$.
unmöglich: $j := j - 1$. Lade: $A := \tilde{A}_j$.
4. Wenn $1 \leq j \leq n$, dann gehe zu 3.
5. Wenn $j = n + 1$, dann A enthält Lösung.
Wenn $j = 0$, dann existiert keine Lösung (Inkonsistente Signaturen).

Bewertung: Viel weniger Iterationen notwendig, genaue Abschätzung evtl. später. Dafür Speicherbedarf von $n \times m \times n$ – Bitmatrizen.

X	X	X		3
X				1
X		X	X	1 2
X		X		1 1
X	X	X		3
3	1	1	1	A ₀ j=1
	1	1	3	
		1		

X	X	X		3
X				1
X		X	X	1 2
	X		X	1 1
	X	X	X	3
3	1	1	1	j=2
	1	1	3	
		1		

	X	X	X	3
X				1
X		X	X	1 2
X		X		1 1
	X	X	X	3
3	1	1	1	j=1 j=2
	1	1	3	
		1		

	X	X	X	3
X				1
X		X	X	1 2
X		X		1 1
	X	X	X	3
3	1	1	1	j=3
	1	1	3	
		1		

	X	X	X	3
X				1
X		X	X	1 2
X			X	1 1
	X	X	X	3
3	1	1	1	j=4
	1	1	3	
		1		

Nur 4 Iterationen (statt $2 * 4 * 1 * 3 * 2 = 48$ beim ersten Verfahren) notwendig!

4.3 Stochastischer Ansatz

Betrachten Signatur $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_b]$, $L := \sum_{k=1}^b \sigma_k$.

Setzen $\Omega := S^{-1}(\sigma) = \{z = [z_1, z_2, \dots, z_n] : S(z) = \sigma\}$.

Definieren $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ durch

$$P(Z) := \frac{|Z|}{|\Omega|} = \frac{|Z|}{\binom{n-L+1}{b}}, \text{ mit } Z \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$

Dann ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein endlicher, laplacescher Zufallsraum.

Definieren *partielle Ordnung* \leq für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n$:

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

$\mathbf{e}^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ bezeichne stets den j -ten Einheitsvektor.

Es gilt: $\Omega \subseteq \{0, 1\}^n$.

Frage: $|\{\mathbf{z} \in \Omega : \mathbf{e}^j \leq \mathbf{z}\}| = ?$

$$\mathbf{z} \in \{\mathbf{z} \in \Omega : \mathbf{e}^j \leq \mathbf{z}\} \Leftrightarrow z_j = 1 \wedge S(\mathbf{z}) = \sigma$$

$$\Leftrightarrow \exists F \in \mathbb{N} : \text{'1-Block } B_F \text{ überdeckt Stelle } j\text{'}$$

$$\Rightarrow \text{'Blöcke links und rechts von } B_F \text{ können unabhängig voneinander verschoben werden'}$$

Damit haben wir \mathbf{z} in zwei Teilvektoren zerlegt, so dass auf jeden Teil Satz 3.1 angewendet werden kann...

Satz 4.1

Sei $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_b]$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dann ist

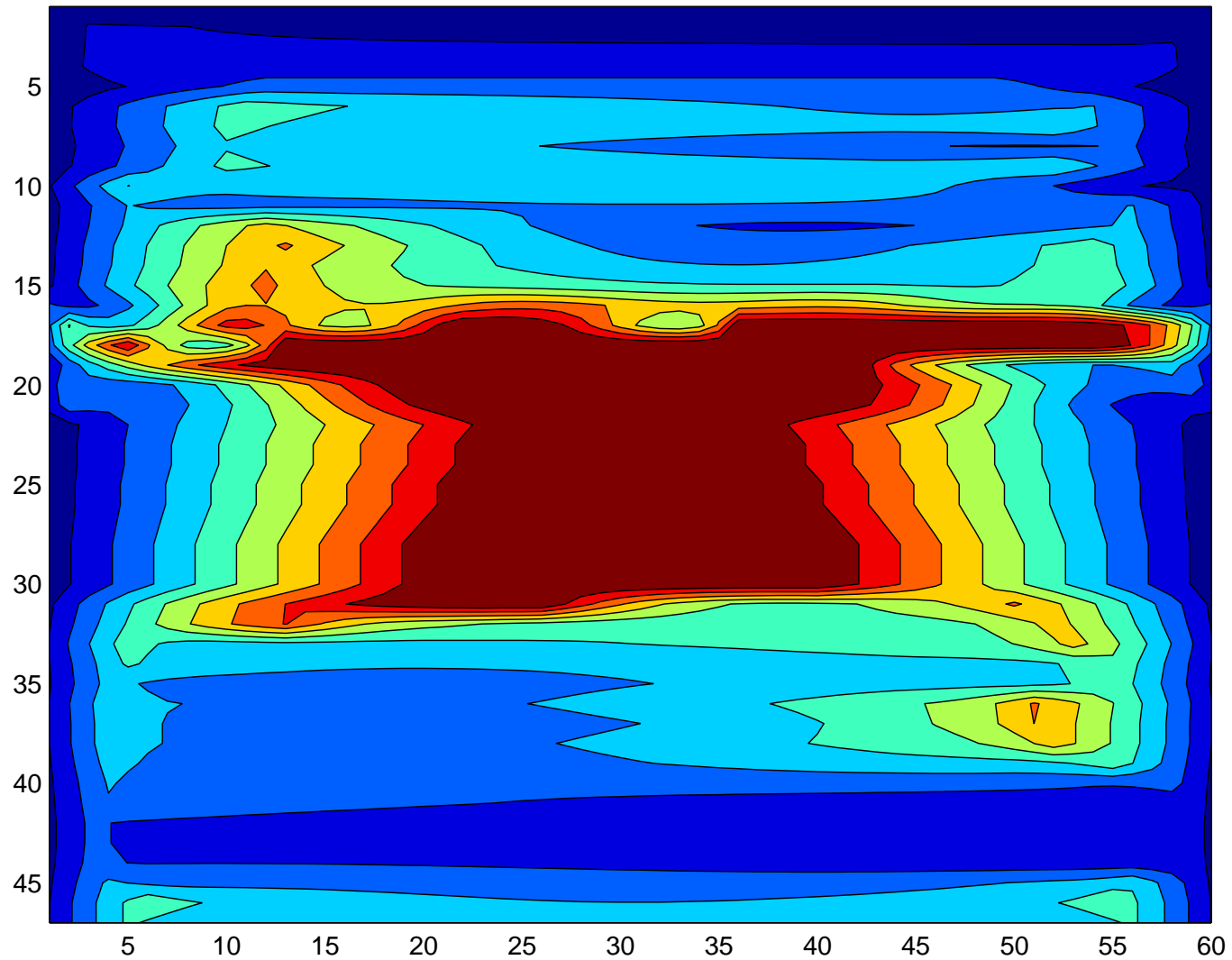
$$\sum_{F=1}^b \sum_{i=1}^{\sigma_F} \binom{j - i - \sum_{k=1}^{F-1} \sigma_k}{F-1} \binom{n - j + i - \sum_{k=F}^b \sigma_k}{b-F}$$

die Anzahl der Bitvektoren $\mathbf{z} \in \{0, 1\}^n$ mit $S(\mathbf{z}) = \sigma$ und $z_j = 1$.

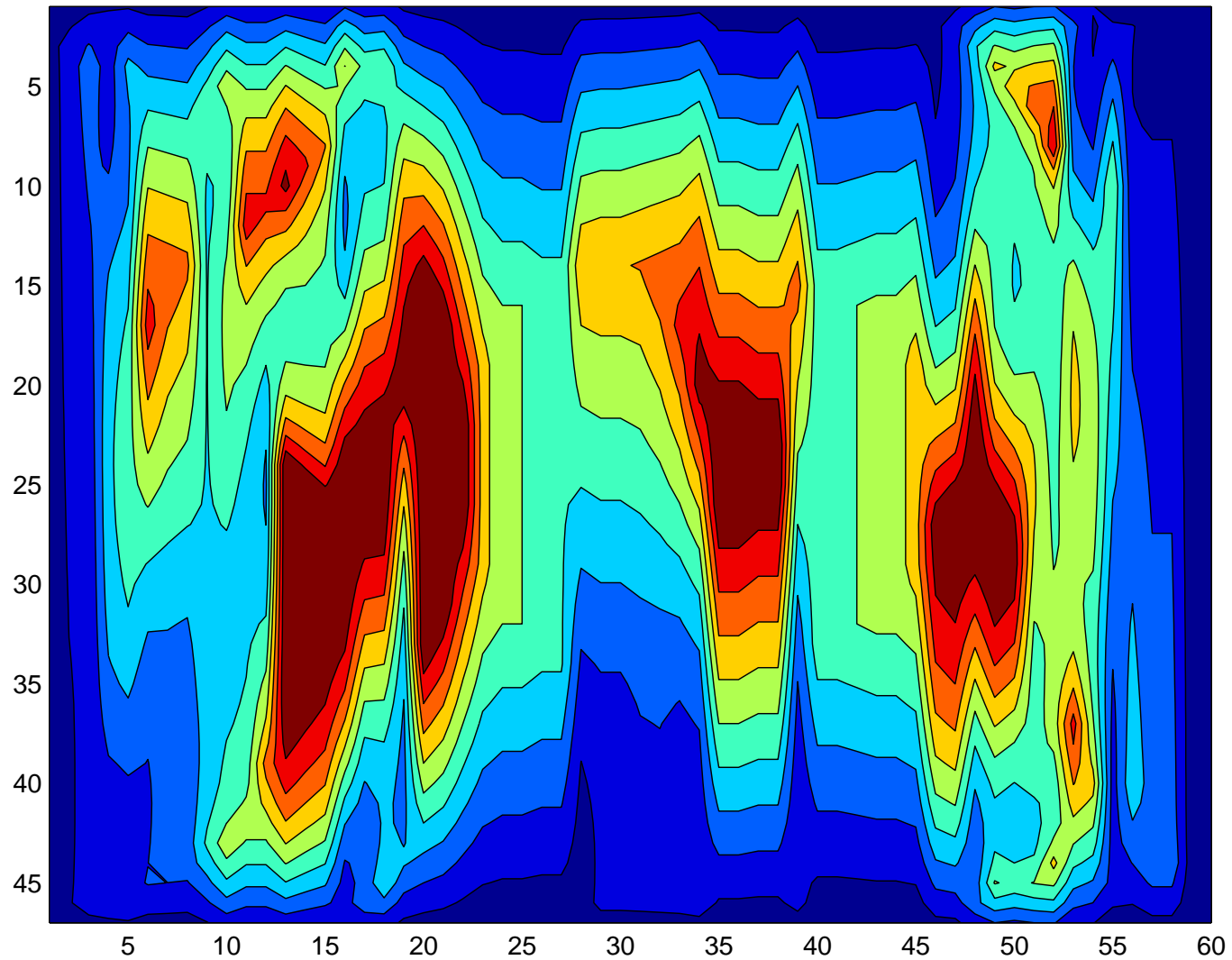
Folgerung: Wir können jetzt $P(e^j \leq \mathbf{z})$ und damit die 'Aufenthaltswahrscheinlichkeiten' für alle Pixel der Zeile bezüglich deren Signatur bestimmen. Gilt $P(e^j \leq \mathbf{z}) = 1$ bzw. 0, so kennt man 1- bzw. 0-Einträge mit Sicherheit!

Analoge Betrachtungen kann man auch spaltenweise durchführen...

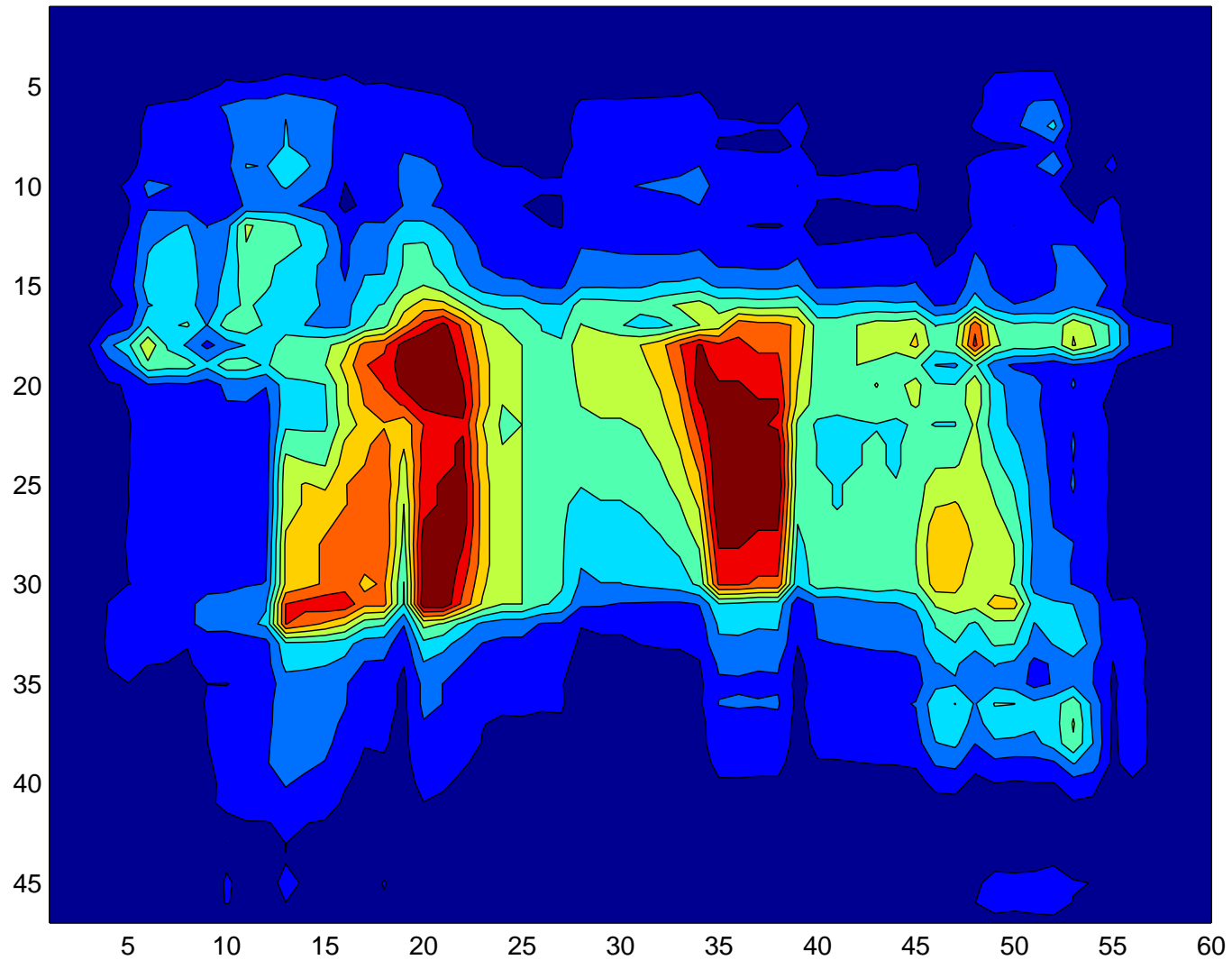
P -zeilenweise für Abbildung 1



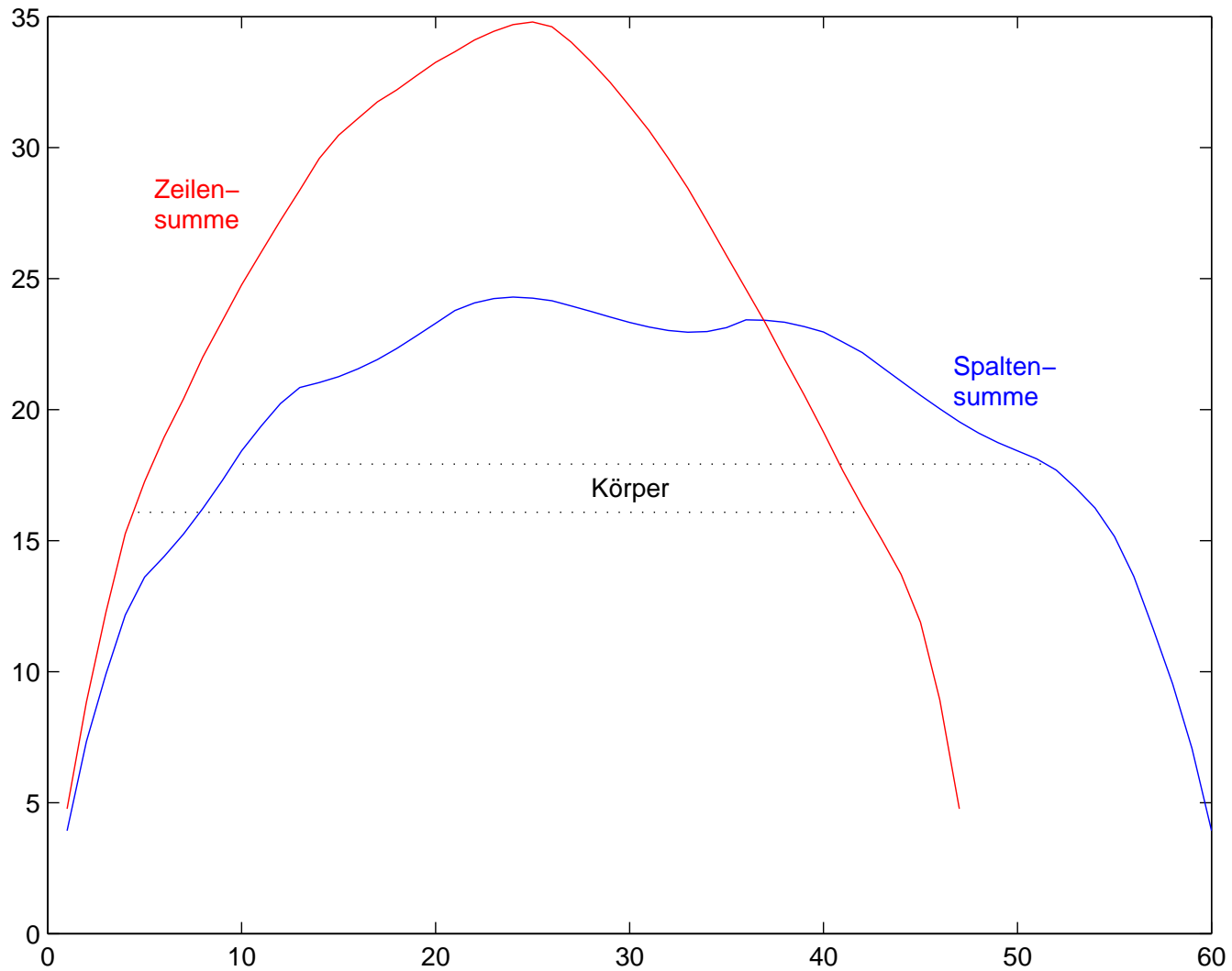
P -spaltenweise für Abbildung 1



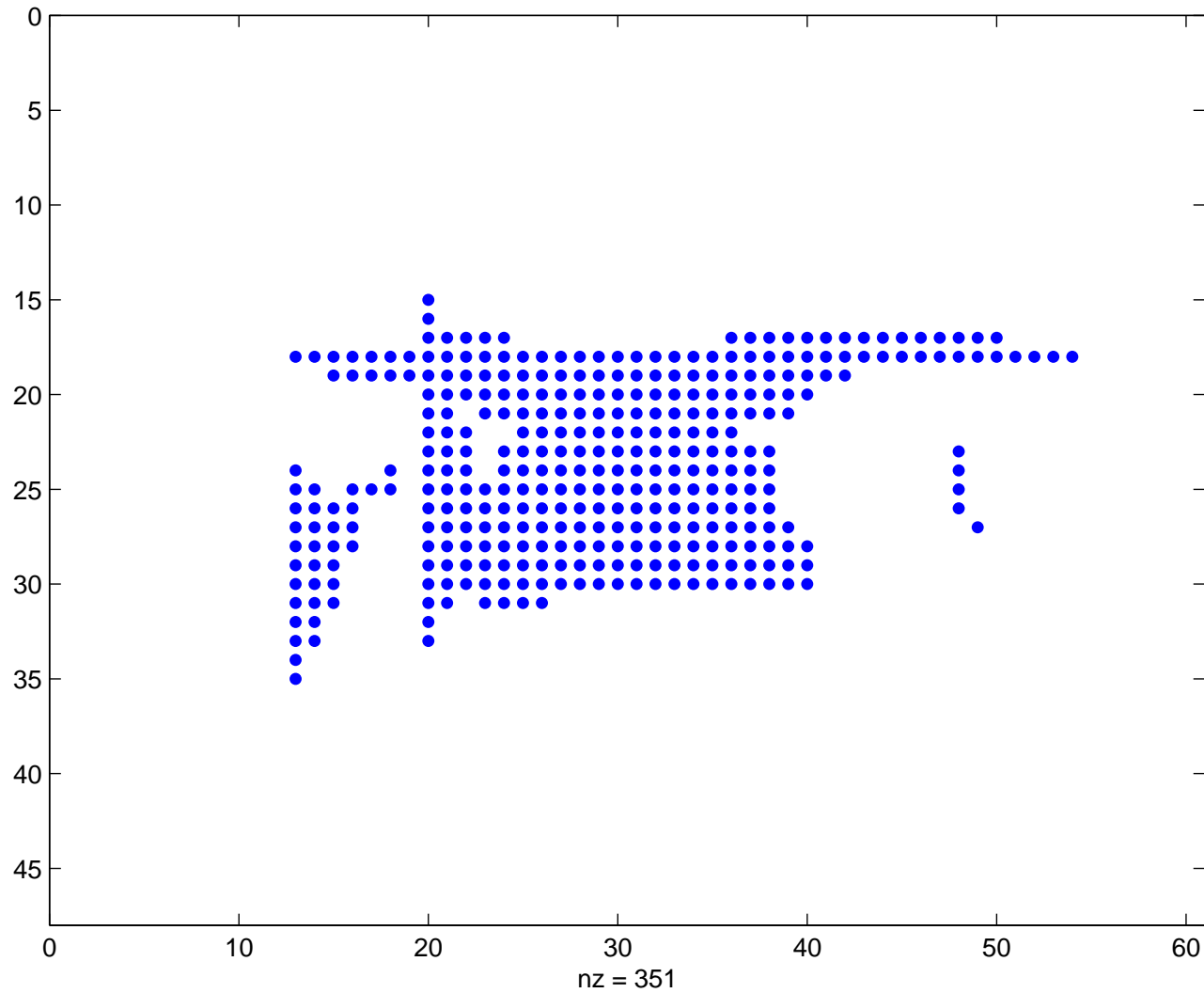
Produkt P -zeilenweise und spaltenweise für Abbildung 1



Zeilen- bzw. Spaltensumme der Wahrscheinlichkeitsmatrizen



Einträge mit $P = 1$



4.4 Wie weiter?

Zusammenfassung: Wir haben jetzt eine erste Bitmatrix A_0 , die uns einige sichere 0- und 1-Einträge des gesuchten Bildes verrät. Wir könnten diese zu A_1 vervollständigen- so dass A_1 z.B. alle Zeilensignaturen erfüllt- und dann eines der Iterationsverfahren darauf anwenden. Wir befinden uns jetzt hoffentlich näher an der gesuchten Lösung.

Eine andere Möglichkeit ist, den stochastischen Ansatz weiter zu verfolgen. Dazu muss folgendes Problem gelöst werden:

Seien $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \{0, 1\}^n$ und $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_b]$ eine Signatur, $\Omega = S^{-1}(\boldsymbol{\sigma})$.
Wie gross ist $|\{z \in \Omega : \mathbf{x} \leq z \text{ und } z \leq \bar{\mathbf{x}}\}|$?

Extrem schwierig. \Rightarrow Entschärfung: Wie gross ist $|\{z \in \Omega : \mathbf{x} \leq z\}|$?

5 Möbiusinversion

Sei (P, \leq) eine endliche reflexive Halbordnung.

Definition [Kronecker-Funktion].

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition [Riemannsche Zetafunktion].

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq y; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Kronecker-Funktion und die Riemannsches-Zetafunktion sind Elemente einer *Inzidenzalgebra* $\mathbb{F}(P)$, deren Elemente f (*Inzidenzen*)

$$\forall x, y \in P : x \not\leq y \Rightarrow f(x, y) = 0$$

erfüllen. Das Produkt $*$ zweier Inzidenzen $f, g \in \mathbb{F}(P)$ ist wie folgt definiert:

$$(f * g)(x, y) := \begin{cases} \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y), & \text{falls } x \leq y; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Einselement ist die Kronecker-Funktion δ .

Definition [Möbiusfunktion].

Die Möbiusfunktion μ ist die Inverse zur Riemannschen Zetafunktion, d.h.

$$\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta.$$

Satz 5.1

Sei (P, \leq) endlich und boolesch. Dann gilt:

$$\mu(x, z) = \begin{cases} (-1)^{|z|-|x|}, & \text{falls } x \leq z; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Satz 5.2 (Möbiusinversion)

Sei (P, \leq) endliche Ordnung, $f, g : P \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$g(x) = \sum_{x \leq z} f(z) \quad \forall x \in P. \quad (5.2)$$

Dann und nur dann gilt

$$f(x) = \sum_{x \leq z} g(z) \mu(x, z). \quad (5.3)$$

Zurück zum Problem: Wie gross ist $|\{z \in \Omega : x \leq z\}|$?

Setzen $P := \{0, 1\}^n$. Dann ist (P, \leq) boolesch. Definieren $|\cdot| : P \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$|\mathbf{x}| := \sum_{i=1}^n x_i$$

(Anzahl der Nichtnulleinträge von \mathbf{x}).

$$g(\mathbf{x}) := |\{z \in \Omega : \mathbf{x} \leq z\}|$$

$$f(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls } S(z) = \sigma; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \leq z} \begin{cases} 1, & \text{falls } S(z) = \sigma; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} = \sum_{\mathbf{x} \leq z} f(z)$, ist (5.2) erfüllt.

Ist $\mathbf{x} \in S^{-1}(\boldsymbol{\sigma})$, so ist $g(\mathbf{x}) = 1$.

Existiert $\mathbf{z} \in \Omega$ so dass $\mathbf{z} < \mathbf{x}$ (Z.B. wenn $|\mathbf{z}| < |\mathbf{x}|$), gilt $g(\mathbf{x}) = 0$.

Ist $\overline{\mathbf{x} \in S^{-1}(\boldsymbol{\sigma})}$, gilt $f(\mathbf{x}) = 0$ und mit (5.3) sowie (5.1) folgt

$$0 = f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \leq \mathbf{z}} g(\mathbf{z})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = g(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} < \mathbf{z}} g(\mathbf{z})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

$$g(\mathbf{x}) = - \sum_{\mathbf{x} < \mathbf{z}} g(\mathbf{z})\mu(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = - \sum_{\mathbf{x} < \mathbf{z}} (-1)^{|\mathbf{z}|-|\mathbf{x}|} g(\mathbf{z}).$$

Zusammenfassung: Haben jetzt rekursive Formel zur Berechnung von $|\{\mathbf{z} \in \Omega : \mathbf{x} \leq \mathbf{z}\}| = g(\mathbf{x})$.

Gibt es explizite Form? Wie kann man sichere Nulleinträge berücksichtigen?

6 Offene Fragen

- Wie erkennt man die Konsistenz anhand der Signatur?
- Wie erkennt man, ob eine eindeutige Lösung existiert?
- Implementierung von 'Verbessertes Iterationsverfahren'?
- Stochastischer Ansatz mit 'Wichtung' der Zellen?
- Explizite Formeln?

7 Literatur

Tittmann, Peter: 'Einführung in die Kombinatorik', Spektrum Akad. Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000.